4. Hausübung zur Quantentheorie II, SS 2007

(abzugeben am Donnerstag, 10.05.2007)

Aufgabe H10 *Quantentest für Parastatistik* (5 Punkte)

In einem eindimensionalen harmonischen Oszillator befinden sich drei identische Teilchen mit Koordinaten x, y, z und Impulsen p_x, p_y, p_z. Der Drei-Teilchen-Zustandsraum wird aufgespannt durch Zustände $|mnp\rangle$ in der Oszillator-Basis, wobei wir annehmen, daß nur die drei niedrigsten Zustände besetzt sind, d.h. $m, n, p \in \{0, 1, 2\}$. Zeigen Sie, daß die Zustände $|\Psi_\pm\rangle$ und $|\Phi_\pm\rangle$, mit

$$\begin{aligned}
|\Psi_+\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}\Big(|mnp\rangle + \omega\,|npm\rangle + \bar{\omega}\,|pmn\rangle\Big) \\
|\Psi_-\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}\Big(|nmp\rangle + \omega\,|pnm\rangle + \bar{\omega}\,|mpn\rangle\Big) \\
|\Phi_+\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}\Big(|nmp\rangle + \bar{\omega}\,|pnm\rangle + \omega\,|mpn\rangle\Big) \\
|\Phi_-\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}\Big(|mnp\rangle + \bar{\omega}\,|npm\rangle + \omega\,|pmn\rangle\Big)
\end{aligned}$$

und $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3} = \frac{1}{2}(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3})$, im Prinzip experimentell unterscheidbar sind. Betrachten Sie dazu den (Drei-Teilchen-) Operator

$$A \;=\; xy\,(zp_z + p_z z) + zx\,(yp_y + p_y y) + yz\,(xp_x + p_x x)\ .$$

Argumentieren Sie, daß $\langle\Psi_+|A|\Psi_+\rangle = \langle\Psi_-|A|\Psi_-\rangle$. Zeigen Sie, daß hingegen der Erwartungswert von A davon abhängt, ob das System im Zustand $|\Psi_+\rangle$ oder $|\Phi_+\rangle$ ist, d.h. $\langle\Psi_+|A|\Psi_+\rangle \neq \langle\Phi_+|A|\Phi_+\rangle$.

Hinweise: Überlegen Sie sich zunächst, für welche Zustände die Operatoren x und $(xp_x + p_x x)$ nichtverschwindende Matrixelemente haben. Nutzen Sie die Symmetrie von A.

Aufgabe H11 *Fockraum für Para-Fermionen* (4 Punkte)

Betrachten Sie hypothetische Teilchen mit den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

$$\Big(a^\dagger\Big)_{mn} \;=\; \Big(a\Big)_{nm} \;=\; \delta_{m,n+1}\sqrt{m(3-n)/3} \qquad \text{für} \quad 0 \le n, m \le 3\ .$$

Der Erzeugungsoperator $a^\dagger$ erzeugt also ein Teilchen, entsprechend vernichtet a eines.

a) Zeigen Sie, daß $\Big(a^\dagger\Big)^4 = 0$.

b) Zeigen Sie

$$\Big(a^\dagger a\Big)_{mn} \;=\; \delta_{mn}\, m(4-m)/3 \qquad \text{und} \qquad \Big(aa^\dagger\Big)_{mn} \;=\; \delta_{mn}\,(m+1)(3-m)/3\ ,$$

und berechnen Sie die Matrixelemente des Teilchenzahloperators

$$N \;:=\; \tfrac{3}{2}(a^\dagger a - a\,a^\dagger + \mathbb{1})\ .$$

Hat N die „richtigen“ Eigenwerte?

b.w.

Aufgabe H12 *Verschobener harmonischer Oszillator im Fockraum* (6 Punkte)

Gegeben sei der Hamiltonoperator $H = H_0 + V$, mit $H_0 = \hbar\omega\, a^\dagger a$ und $V = \varphi(a + a^\dagger)$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$, wobei $a^\dagger$ und a Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Bosonen seien.

a) Geben Sie die Energien und Eigenfunktionen zu H_0 in der Besetzungszahldarstellung an.

b) Führen Sie den Operator $U = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}f^2}\mathrm{e}^{-fa^\dagger}\mathrm{e}^{fa}$ mit $f := \varphi/(\hbar\omega)$ ein und zeigen Sie seine Unitarität.

c) Bestätigen Sie, daß $[U, a] = fU$ sowie $[H_0, U] = -VU - \frac{\varphi^2}{\hbar\omega}U$. Zeigen Sie damit, daß $|n\rangle = U\,|n_0\rangle$ Eigenfunktion zu H ist und geben Sie die zugehörigen Energien an.

d) Bilden Sie $\tilde{a} = U a\, U^{-1}$ und zeigen Sie, daß $\tilde{a}$ den Hamilton-Operator „diagonalisiert".

Hinweise: Erinnern Sie sich an die Baker-Hausdorff-Identität, $\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$.
Es gilt ferner $[F(a), a^\dagger] = \frac{\partial}{\partial a}F(a)$.